

Grundpraktikum II

O10 - Linsensysteme

Julien Kluge

14. März 2016

Student: Julien Kluge [REDACTED]
julien@physik.hu-berlin.de

Partner: [REDACTED]
[REDACTED]

Betreuer: B.Sc. L. Esguerra

Raum: 212

Messplatz: 1

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	1
2	Versuchsdurchführung	2
2.1	Brennweitenbestimmung nach Bessel	2
2.2	Brennweitenbestimmung mit dem Sphärometer	2
2.3	Brennweitenbestimmung nach Abbe	3
3	Auswertung/Fehlerberechnung	3
3.1	Brennweitenbestimmung nach Bessel	3
3.2	Brennweitenbestimmung mit dem Sphärometer	3
3.3	Brennweitenbestimmung nach Abbe	4
4	Fehler-/Ergebniseinschätzung	5
5	Anlagen	7
5.1	Abbildungen	7
5.2	Messwerte	8
6	Literaturverzeichnis	9

1 Abstract

In diesem Versuch wurden die Brennweiten zweier Einzellinsen als auch die Hauptebenen und Brennweiten des Systems der Beiden untersucht. Dabei wurden drei verschiedene Methoden angewandt. Folgende Ergebnisse sind berechnet worden:

- Brennweite Linse 2 (Methode nach Bessel): $f = (24.955 \pm 0.015)$ cm
- Brennweite Linse 3 (Sphärometerbestimmung): $f = (16.93 \pm 0.09)$ cm
- Brennweite des Systems (Methode nach Abbe): $f = (11.31 \pm 0.15)$ cm

2 Versuchsdurchführung

2.1 Brennweitenbestimmung nach Bessel

Bedingungen für scharfes Bild angeben

Bei der Methode von Bessel macht man sich zu nutze, dass eine Linse im Strahlengang zwei Positionen hat die ein Scharfes Abbild auf dem Schirm ergeben. Statt also nun die ungenauere Messung des Nullpunktes bis zur Linsenmitte vorzunehmen, lässt sich einfach der Unterschied zwischen den beiden scharfen Positionen ausmessen und berechnen. Mit der Länge l von Bild zum Schirm und den beiden Linsenpositionen e_1, e_2 ergibt sich die Gleichung für die Brennweite zu¹:

$$f = \frac{l^2 - |e_1 - e_2|^2}{4l} \quad (1)$$

Mit $e_1 > e_2$ ergibt sich durch gaußsche Fehlerfortpflanzung²

$$u_f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(e_1 - e_2)^2 (u_{e_1}^2 + u_{e_2}^2)}{l^2} + \left(\frac{u_l ((e_1 - e_2)^2 + l^2)}{2l^2} \right)^2} \quad (2)$$

Diese wurde nun mit 10 Messpaaren gemessen und so ein gemitteltes Ergebnis bestimmt.

2.2 Brennweitenbestimmung mit dem Sphärometer

welches h ?
erklären!

Mithilfe eines Sphärometer lässt sich über einen bestimmten Radius r den Höhenunterschied h messen. Mithilfe folgender Relation lässt sich so nun der Krümmungsradius der jeweiligen Linsenseite berechnen.

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2} \quad (3)$$

$$u_R = \sqrt{u_h^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2h^2} \right)^2 + \frac{r^2 u_r^2}{h^2}} \quad (4)$$

Hat man so nun die beiden Krümmungsradien R_1, R_2 der Linse bestimmt kann man mit folgender Gleichung die Brennweite bestimmen

$$f = \left[(n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1} \quad (5)$$

$$u_f = \sqrt{\frac{R_2^4 u_{r_1}^2 + R_1^4 u_{r_2}^2}{(n - 1)^2 (R_1 + R_2)^4}} \quad (6)$$

Da die gemessene Linse eine gleichseitig, bikonvexe Linse ist, ließe sich die Gleichung vereinfachen zu¹:

$$f = \frac{R}{2(n - 1)}$$

Da in der Messung keine Varianzen auftraten, konnte außerdem nur ein systematischer Fehler angenommen werden. evtl. schätzen

¹Die Gleichung wurde nicht zur Berechnung der Unsicherheiten herangezogen da sie den Systematischen Fehler der Messung in einer Richtung unterschlagen könnte.

2.3 Brennweitenbestimmung nach Abbe Abstand

In der Brennweitenbestimmung nach Abbe wurde die ~~Länge~~ des Schirms für jedes Messpaar verändert. Damit wurde das Linsensystem an die Position geschoben, bei der es das erste scharfe Bild produziert. Dieser Abstand x wurde von einem festgelegten Punkt aus gemessen. Desweiteren wurde gemessen, um wie viel sich das Bild auf dem Schirm vergrößert hat, um den Vergrößerungsmaßstab γ zu berechnen. Das ganze wurde dann, für das um 180° gedrehte Linsensystem, wiederholt. Daraufhin konnte man mit folgender Gleichung eine Regression durchführen

$$x(\gamma) = f \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) + c \quad \text{Idee: eher nach gamma Umstellen} \quad (7)$$

um die Brennweite f und die Versetzung c zu bestimmen. Es wurden auch hier zehn doppelte Messpaare aufgenommen.

3 Auswertung/Fehlerberechnung

3.1 Brennweitenbestimmung nach Bessel

Für alle drei Längenwerte wird ein Ablesefehler von 1mm und dem Büromaßstab² geschätzt. Der Ablesefehler setzt sich zusammen aus einem halben Skalenteil und einer Unsicherheit die Position am Maßband exakt fixieren zu können. Damit ergibt sich jede Unsicherheit mit Länge L in Meter zu

$$\pm \sqrt{(1\text{mm})^2 + (0.6\text{mm} + 0.4\text{mm/m} \cdot L)}.$$

Für alle zehn aufgenommenen Wertetripel ergeben sich nach Gleichung 1 demnach auch zehn Brennweiten. Da sich alle Unsicherheitsintervalle miteinander überschneiden wurde ein gewichtetes Mittel angewandt. Es ergibt sich damit die Brennweite nach der Methode von Bessel zu

$$\bar{f}_{Linse2} = (24.955 \pm 0.015) \text{ cm} \quad (8)$$

Es fällt ebenfalls auf, dass der Term mit der Unsicherheit der Länge l nur zu circa 1% mit in die Unsicherheit eingeht. e_1 und e_2 teilen sich den restlichen Fehler offensichtlich mit nahezu 50 : 50 auf.

3.2 Brennweitenbestimmung mit dem Sphärometer

eher die
Unsicherheit

Da sechs sukzessive Messungen den gleichen Wert ergeben haben, konnte nur ein systematischer Fehler von einem halben Skalenteil ($\pm 0.005\text{mm}$) geschätzt werden. Über die Angabe des Radius des Sphärometers gab es keine Angaben, weswegen der Einfachheit halber angenommen wird, dass dieser vernachlässigbar klein ist.

Setzt man den Messwert von 64 Skalenteilen in Gleichung 3 ein, ergibt sich der Radius beidseitig zu

$$R = (17.61 \pm 0.14) \text{ cm}$$

Aus Gleichung 5 lässt sich damit leicht die Brennweite berechnen

n Fehlerfrei?

$$f_{Linse3} = (16.93 \pm 0.09) \text{ cm} \quad (9)$$

3.3 Brennweitenbestimmung nach Abbe

Die Vergrößerung in dieser Reihe wurde dadurch berechnet, dass auf dem Schirm konstant in einem $B = 2\text{cm}$ Intervall die projizierte Skale G abgelesen wurde. Damit wurde effektiv die Größe des Gegenstands geändert. Die Vergrößerung berechnet sich mit

$$\gamma = \frac{B}{G} \quad (10)$$

Wie aus Gleichung 7 zu entnehmen, setzen wir

$$z = 1 + \frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{G}{B} \quad (11)$$

Damit entsteht eine Gleichung, nach der eine lineare Regression ausgeführt werden kann, um die Brennweite f und die Versetzung c zu bestimmen.

$$x = f \cdot z + c \quad (12)$$

Mit den gemessenen Werten ergeben sich

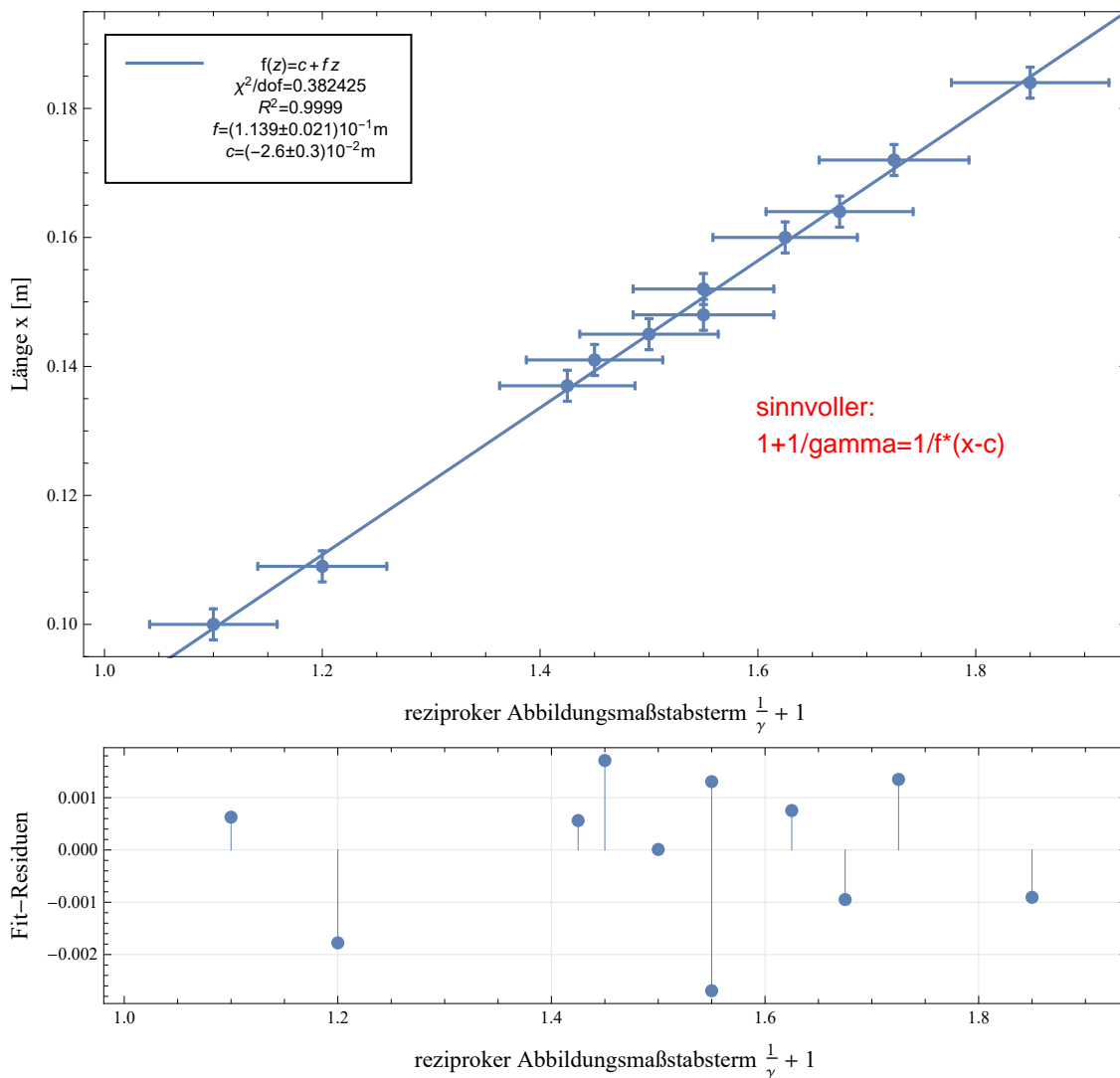


Abbildung 1: lineare Regression des Messwerte nach 12 mit Linse 3 zuerst

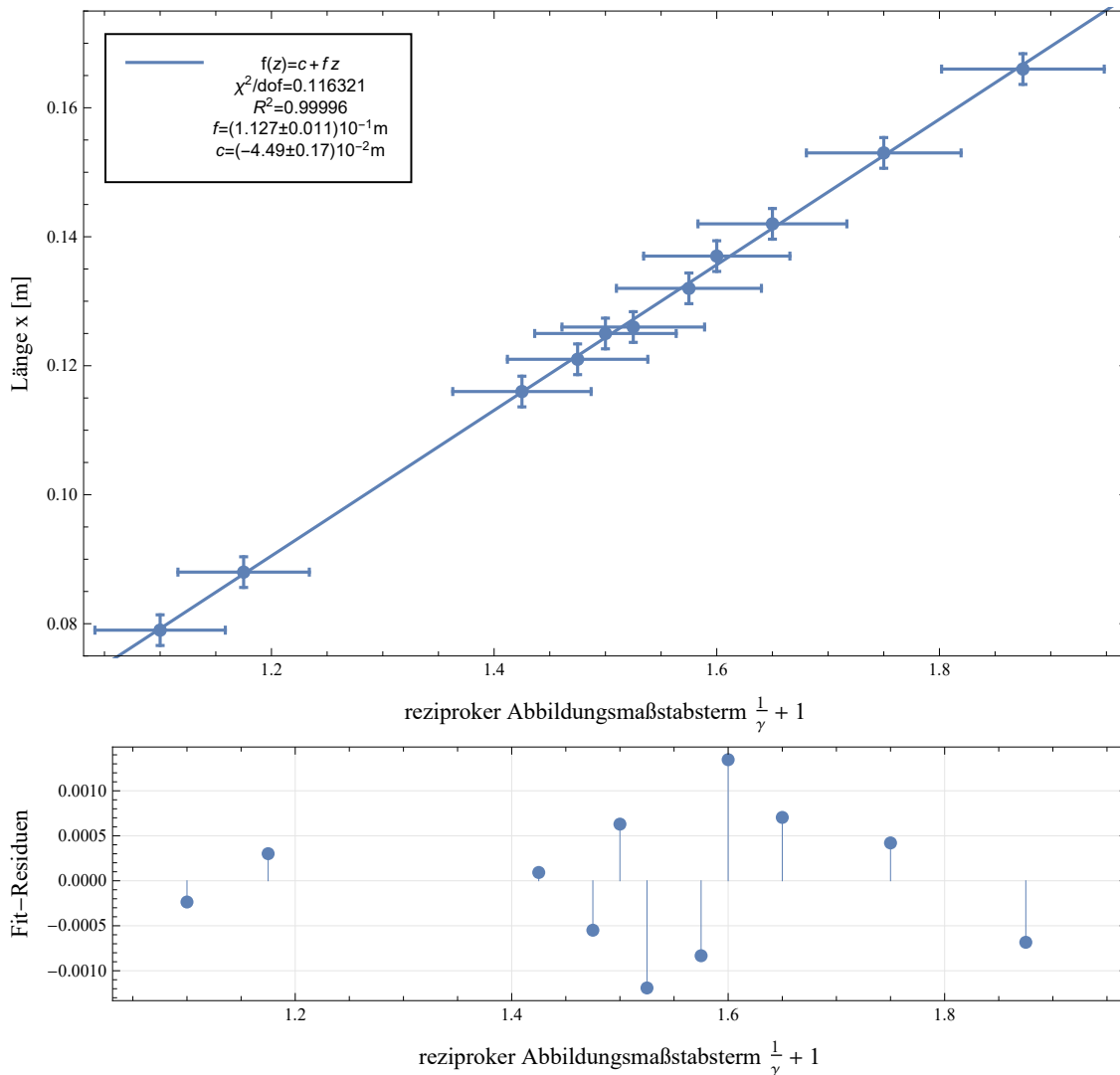


Abbildung 2: lineare Regression des Messwerte nach 12 mit Linse 2 zuerst

Leider sind die Versetzungen c aufgrund eines Messfehlers ohne Bedeutung in diesen Regressionen. Dazu später in der Fehlerbetrachtung mehr. Der Vollständigkeit halber sei a aber trotzdem angegeben mit: $a = (-7.1 \pm 0.4)\text{cm}$

Dabei wurden die Unsicherheiten für die Längen wie oben bestimmt. Die beiden erhaltenen Brennweiten können gewichtet gemittelt werden

$$\bar{f}_{System} = (11.31 \pm 0.15)\text{cm} \quad (13)$$

Konstruiert man sich das Linsensystem und benutzt die Brennweiten wie sie mithilfe der Methode von Bessel und dem Sphärometer bestimmt wurden, wie in Abbildung 3 zu sehen, dann bekommt man eine Brennweite die mit $f = 10.275\text{cm}$ etwas unterhalb der Errechneten liegt.

Ergebnisse der Bildkonstruktion mit Unsicherheit

4 Fehler-/Ergebniseinschätzung

Für die beiden ersten Methoden (Bessel & Sphärometer) ergibt sich eine sechsmal kleinere Unsicherheit für die Methode von Bessel. Das ist überraschend, da in der Methode für das

Sphärometer weder zufällige Fehler für h , noch Unsicherheiten für den Brechungsindex der Linse eingegangen sind. Daraus folgt, dass bei sorgfältigerer Dokumentation einiger Werte die Methode mit dem Sphärometer erstmal nur noch ungenauer wird.

Die Methode nach Abbe ist relativ ungenau da sie das Linsensystem $10\times$ ungenauer bestimmt hat, als die Methode von Bessel eine Einzellinse und so starke Potenzierung der Ungenauigkeiten von nur zwei Linsen nicht zu erwarten sind. Allerdings müssen auch multiple Messfehler eingeräumt werden. Einerseits wurde nicht oder nur ungenügend über den gesamten möglichen optischen Wegbereich gemessen, welcher die Unsicherheit zunehmend minimiert hätte. Desweiteren wurde beim drehen des Systems auch von der falschen Kante aus gemessen, weswegen in dem Regressionsergebnis für a nun auch systematisch die Länge von Kante zu Kante aufsummiert ist. Eine Möglichkeit wäre es, diese Länge zu messen und somit aus dem Wert zu entfernen aber das führt nur zu weiteren Unsicherheiten durch weitere Messung. Aus der Konstruktion folgt für die Brennweite außerdem eine etwas niedrigere Brennweite als berechnet. Das kann aber auf Ungenauigkeitsfehler beim konstruieren zurückgeführt werden da die Werte trotz dessen nahe beieinander liegen. Die χ^2 -Tests sind stark unter eins und weisen damit auf zu groß geschätzte Fehler hin. Das hat allerdings keine Auswirkungen auf die Unsicherheit der Ergebnisse weswegen sie als vernachlässigbar gesehen werden kann, da nur die relative Größe der Fehler benötigt wird. Zum Schluss kann noch erwähnt werden, dass der gemessene Wert das Fehlerintervall des Wertes über den Matrixformalismus schneidet ($f = (11.14 \pm 0.06)\text{cm}$) und damit trotzdem als gut angesehen werden kann.

5 Anlagen

5.1 Abbildungen

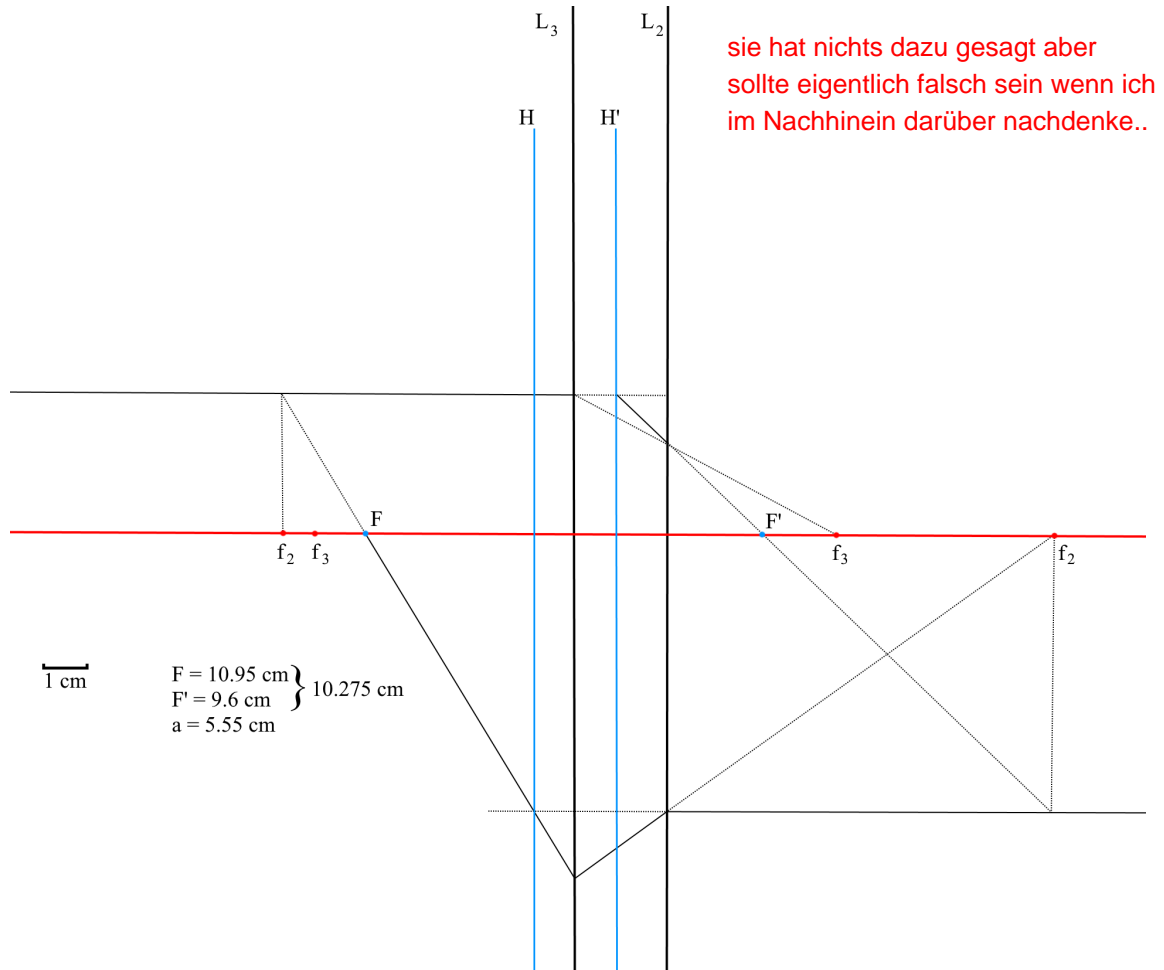


Abbildung 3: visualisierte Konstruktion des Linsensystems mit der Linse 3, Linse 2 und eingezeichneten Hauptebenen und Brennweiten des Systems

5.2 Messwerte

$n = \frac{1}{8} = \frac{7+1}{8}$
 Abstand: 6cm
 Linse 2: Bessel 10 Abstände
 Linse 3: Splinometer 6X
 Linsensystem: 10 Wertepaare/Seite
 Fehler:
 Positionen ~~der~~ Linse
 Andere fehlen
 Schlusstücke: 2cm

A1) (+1mm)
 $e_1 = 35,7 \text{ cm}, e_2 = 54,7, l = 103,4$
 $e_1 = 37,0 \text{ cm}, e_2 = 67,7, l = 102,0$
 $e_1 = 32,7 \text{ cm}, e_2 = 62,4, l = 108,0$
 $e_1 = 29,8 \text{ cm}, e_2 = 73,2, l = 116,0$
 $e_1 = 30,4 \text{ cm}, e_2 = 70,6, l = 119,0$
 $e_1 = 31,7 \text{ cm}, e_2 = 65,3, l = 110,0$
 $e_1 = 33,6, e_2 = 59,2, l = 106,0$
 $e_1 = 34,6, e_2 = 56,8, l = 104,5$
 $e_1 = 33,0, e_2 = 61,0, l = 107,0$
 $e_1 = 30,7, e_2 = 69,2, l = 113,0$

$1606 - 698 = 908 \text{ mm}$
 $n = 1,52$

Konkavlinse $r = 15 \text{ mm}$
 $f_0 = 0,01 \text{ mm}$
 $r = 64 \cdot 0,01 \text{ mm} \pm 0,005 \text{ mm}$
 $= 64$
 64
 64
 64
 64

Abbildung 4: Messdatenprotokoll - Seite 1

Bildweite: $z_{\text{cm}} \pm 0,5 \text{ mm}$

g	X	g'	X'
1,45 cm	17,2 cm	1,50 cm	15,3 cm
1,25 cm	16,0 cm	1,20 cm	13,7 cm
/	13,7 cm	1,05 cm	12,6 cm
2,1 cm	14,8 cm	/	/
0,9 cm	14,1 cm	0,95 cm	12,1 cm
0,85 cm	13,7 cm	0,85 cm	11,6 cm
1,0 cm	14,5 cm	1,0 cm	12,5
1,15 cm	13,7 cm	1,15	13,2 cm
1,10	15,2	/	/
0,85 cm	13,7 cm	0,85	11,6 cm
1,35 cm	16,4 cm	1,30	14,2 cm
1,70 cm	18,4 cm	1,75	16,6 cm
0,90 cm	10,9 cm	0,35 cm	8,8 cm
0,20 cm	10,0 cm	0,20 cm	7,9 cm

11.08.16
Jus

Abbildung 5: Messdatenprotokoll - Seite 2

6 Literaturverzeichnis

- [1] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Elektrodynamik und Optik*, 2010
- [2] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*, 2007
(mit Korrekturen *Einführungsscript 2007* von P. Schäfer, 2016)